第26卷 第6期
2009年12月

工 程 数 学 学 报

CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS

Vol. 26 No. 6
Dec. 2009

文章编号:1005-3085(2009)06-1062-07

修理工 N-策略休假的带有温贮备的可修系统的可靠性分析*

岳德权， 祁洪娟， 曹 静， 李兰巧

(燕山大学理学院，秦皇岛 066004)

摘 要: 修理工休假的多部件温贮备可修系统模型广泛应用于电力系统，医疗设备系统和制造系统等领域。本文研究了修理工 N-策略休假的多部件温贮备可修系统，探讨该系统的稳态可用度和稳态故障频度。利用Markov过程理论和递归迭代的方法，求出了系统稳态概率的迭代计算公式，并进一步得到了系统稳态可用度和稳态故障频度。

关键词: 可修系统；温贮备；N-策略；稳态可用度；稳态故障频度

分类号: AMS(2000) 90B25 **中图分类号**: O213.2 **文献标识码**: A

1 引言

在可修系统研究中，冗余系统一直以来受到学者们的广泛关注，详见文献 [1]。在排队系统中，服务台常常采用 N-策略服务，既到达 N 个或 N 个以上顾客时，服务台时才开始服务。在实际生活中的顾客排队等待服务，由于其耐性有限而可能退出系统，这种现象被称为中途退出现象。把 N-策略和中途退出的概念引入到可修系统中，使系统所研究的模型更加实用和具有实际意义。

近些年来，许多学者对温贮备可修系统进行了研究。孙海珍和苏保河[2] 对修理工可休假的两部件的并联可修系统进行了可靠性分析，得到了系统的可用度，系统故障频度及修理工处于系统外状态的概率，并对系统的效益进行了分析。吴清太和叶尔骅[3] 对开关寿命连续型二部件温贮备可修系统进行了研究，假设系统所有变量均服从指数分布，利用Markov过程理论得到了系统的可靠度和系统首次故障前平均时间的表达式。Wang和Ke[4] 研究了有 R 个修理工，带有止步和中途退出的温贮备可修系统，对系统的稳态可用度和平均寿命进行了分析并得到了明显表达式。Wang和Kuo[5] 对具有4种不同结构的温贮备可修系统进行了研究，得到了各系统的稳态可用度和平均寿命的表达式，并对这4种结构从可靠性的角度进行了比较。Wang和Sivazlian[6] 研究了具有 R 个修理工的温贮备可修系统，假设系统所有变量均服从指数分布，利用Markov过程理论建立了系统状态转移概率微分方程组，得到了系统可靠度和平均寿命的明显表达式，并对系统的各参数进行了敏感度分析。

Jain等[7] 研究了具有一个修理工且修理工 N-策略休假的温贮备可修系统，利用Laplace变换的方法，求出了系统的可靠度和平均寿命的直接表达式，并对系统的各参数进行了敏感度分析，但并没有给出系统的稳态结果。Jain等[8] 研究了有两个修理工具有启动时间和休假的温贮

收稿日期: 2007-05-15. **作者简介**: 岳德权 (1964年4月生)，男，博士，教授. 研究方向：排队论与可靠性理论.
***基金项目**: 国家自然科学基金 (70671088).

备可修系统，利用 Markov 过程理论和递归的方法得到了系统的平均故障部件个数和平均等待时间等一系列稳态排队指标。

文献 [7] 没有给出系统的稳态指标，并且如果用此文献提供的方法求系统的稳态指标很复杂。另外用 Laplace 变换的方法可得到系统的稳态概率方程组，但求解的过程极其复杂。本文给出系统的稳态概率方程组，采用递归迭代的方法，得到了系统的稳态可用度和系统稳态故障频度的直接表达式。

2 模型假定

本文考虑一个修理工 N-策略休假的多部件温贮备可修系统，模型假定如下：

1) 系统由 m 个工作部件，s 个温贮备部件，一个转换开关以及一个修理工组成。系统失效当且仅当系统有 $m+s-k+1$ 个或 $m+s-k+1$ 个以上部件失效时系统失效，$k=1,2,\cdots,m$。

2) m 个工作部件是相互独立的其寿命均服从参数为 λ 的指数分布。s 个温贮备部件也是相互独立的其寿命均服从参数为 α 的指数分布，这里 $0<\alpha<\lambda$。

3) 当工作部件失效时，如果系统中有正常的温贮备部件，就用贮备部件去替换失效的部件。当修理工忙时，失效部件就在系统中等待。修理工一次只能修理一个部件，修理规则是先到先服务 (FCFS)。修理工的修理时间服从参数为 $\mu(>0)$ 的指数分布。

4) 当系统中无失效部件时，修理工去休假，休假结束时遇到系统中有 N 个或 N 个以上部件失效时返回进行修理，否则再进行一次休假。

5) 失效的部件在系统中等待修理工的修理。当修理工忙时，若失效部件耐心等待一段时间后仍没有被修理，这时可能离开排队等待修理的队列，进入系统的缓冲区。等到系统中所有失效的部件都修理完时，缓冲区里的部件在按照到达顺序依次被修理。失效部件在系统中修理前耐心等待的时间服从参数为 $\nu(>0)$ 的指数分布。

6) 转换开关是完全可靠的，转换是瞬时的。初始时刻系统中的所有部件都是正常的。

3 模型分析

定义系统的状态如下：$(0,n)$ 表示时刻 t 修理工在休假，系统中有 n 个部件故障，$0\le n\le N-1$，$(1,n)$ 表示时刻 t 修理工在修理，系统中有 n 个部件故障，$1\le n\le L$，其中 $L=m+s-k+1$，$k=1,2,\cdots,m$。

令 $N(t)$ 表示系统在时刻 t 所处的状态，由于假定所有的随机变量均服从指数分布，所以 $\{N(t),t\ge 0\}$ 构成一个连续时间的齐次 Markov 过程，其状态空间为

$$E=\big\{(0,0),(0,1),\cdots,(0,N-1),(1,1),(1,2),\cdots,(1,L)\big\},$$

其中

$$W=\big\{(0,0),(0,1),\cdots,(0,N-1),(1,1),(1,2),\cdots,(1,L-1)\big\},$$

为工作状态空间，$F=\{(1,L)\}$ 为故障状态空间。系统的状态转移图如图 1 所示。

定义系统状态转移概率函数如下

$$P_{(i,j)(k,l)}(\Delta t)=P\big\{N(t+\Delta t)=(k,l)\mid N(t)=(i,j)\big\},\quad (i,j)\in E,\quad (k,l)\in E.$$

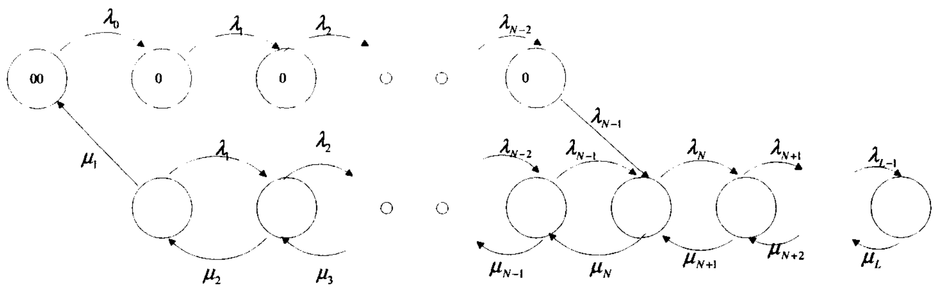

图 1: 系统的状态转移图

由Markov过程理论，易得系统的状态转移概率矩阵$\boldsymbol{Q}$具有如下的分块结构

$$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix},$$

其中$\boldsymbol{B}=(0,0,\cdots,0,\lambda_{L-1})^T$是$(N+L-1)\times 1$列向量，$\boldsymbol{C}=(0,0,\cdots,0,\mu_L)$是$1\times(N+L-1)$行向量，$\boldsymbol{D}=-\mu_L$是常数，矩阵$\boldsymbol{A}$有如下的分块结构

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{G} & \boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{J} & \boldsymbol{U}\end{pmatrix},$$

其中

$$\boldsymbol{G}=\begin{pmatrix}-\lambda_0 & \lambda_0 & & & \\ & -\lambda_1 & \lambda_1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -\lambda_{N-2} & \lambda_{N-2}\\ & & & & -\lambda_{N-1}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}-\lambda_1-\mu_1 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & -\lambda_2-\mu_2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{L-2} & -\lambda_{L-2}-\mu_{L-2} & \lambda_{L-2}\\ & & & \mu_{L-1} & -\lambda_{L-1}-\mu_{L-1}\end{pmatrix}.$$

矩阵$\boldsymbol{G}$和$\boldsymbol{U}$分别是N阶和$L-1$阶方阵，矩阵$\boldsymbol{J}$是第一行第一列元素为μ_1，其余元素都为零的$(L-1)\times N$矩阵，矩阵$\boldsymbol{H}$是第N行第N列元素为λ_{N-1}，其余元素都为零的$N\times(L-1)$矩阵

$$\lambda_n=\begin{cases}m\lambda+(s-n)\alpha, & n=0,1,2,\cdots,s,\\ (m+s-n)\lambda, & n=s+1,s+2,\cdots,L-1,\end{cases}$$

$$\mu_n=\mu+(n-1)\nu,\quad n=1,2,\cdots,L.$$

m 个工作部件和 $(s-n)$ 个贮备部件的失效率。
$_n$ 表示 $(m+s-n)$ 个工作部件的失效率。当 $n=$
复率和 $(n-1)$ 个等待修理的部件有一个离开队伍进

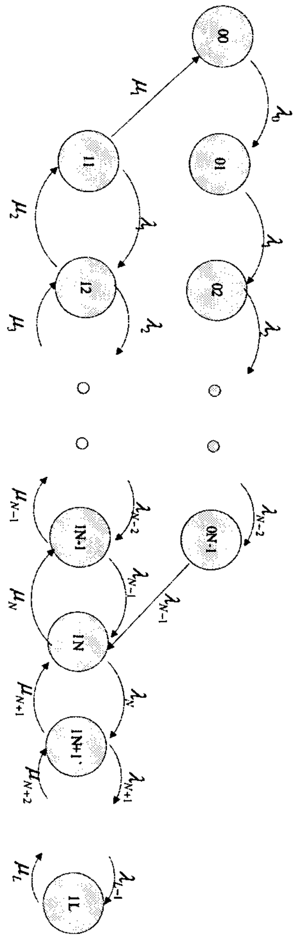

图 1: 系统的状态转移图

$(t)=(i,j)\}, \quad (i,j)\in W,$

$$\boldsymbol{\pi Q}=0 \qquad \boldsymbol{\pi e}=1, \tag{1}$$

$\cdots, \pi_{1L})$ 是 $(L+N)$ 维的行向量，$\boldsymbol{e}=(1,1,\cdots,1)^T$

$$=0,1, \quad j=0,1,\cdots,L \tag{2}$$

$$\sum_{=1}^{L} q_{1i}\Big)^{-1}, \tag{3}$$

$$0, \qquad 1,2,\cdots,N-1, \tag{4}$$

$$j=1, \qquad \frac{\mu_1)}{}, \quad j=2, \qquad {}_{-1}+\frac{\lambda_0}{\mu_j}, \quad j=3,4,\cdots,N, \qquad {}_{-1}, \quad j=N+1,\ N+2,\ \cdots,\ L. \tag{5}$$

证明　将方程组 (1) 写成分量形式为

$$\mu_1\pi_{11}-\lambda_0\pi_{00}=0, \tag{6}$$

$$\lambda_i\pi_{0i}-\lambda_{i+1}\pi_{0i+1}=0, \quad i=0,1,\cdots,N-2, \tag{7}$$

$$\mu_2\pi_{12}-(\lambda_1+\mu_1)\pi_{11}=0, \tag{8}$$

$$\lambda_i\pi_{1i} - (\lambda_{i+1} + \mu_{i+1})\pi_{1i+1} + \mu_{i+2}\pi_{1i+2} = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, N-2, \tag{9}$$

$$\lambda_{N-1}\pi_{0N-1} + \lambda_{N-1}\pi_{1N-1} - (\lambda_N + \mu_N)\pi_{1N} + \mu_{N+1}\pi_{1N+1} = 0, \tag{10}$$

$$\lambda_i\pi_{1i} - (\lambda_{i+1} + \mu_{i+1})\pi_{1i+1} + \mu_{i+2}\pi_{1i+2} = 0, \quad i = N, N+1, \cdots, L-2, \tag{11}$$

$$\lambda_{L-1}\pi_{1L-1} - \mu_L\pi_{1L} = 0, \tag{12}$$

$$\sum_{i=0}^{N-1}\pi_{0i} + \sum_{i=1}^{L}\pi_{1i} = 1. \tag{13}$$

由方程 (6) 可得

$$\pi_{11} = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_{00}. \tag{14}$$

由方程 (7) 可得

$$\pi_{0j} = \frac{\lambda_0}{\lambda_j}\pi_{00}, \quad j = 1, 2, \cdots, N-1. \tag{15}$$

由方程 (8) 和 (14) 可得

$$\pi_{12} = \frac{\lambda_0(\lambda_1 + \mu_1)}{\mu_1\mu_2}\pi_{00}. \tag{16}$$

改写方程 (9) 可得如下迭代公式

$$\mu_{i+2}\pi_{1i+2} - \lambda_{i+1}\pi_{1i+1} = \mu_{i+1}\pi_{1i+1} - \lambda_i\pi_{1i}, \quad i = 1, 2, \cdots, N-2. \tag{17}$$

重复使用迭代公式 (17) 并利用方程 (8) 和 (14)，可得

$$\pi_{1j} = \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}\pi_{1j-1} + \frac{\lambda_0}{\mu_j}\pi_{00}, \quad j = 3, 4, \cdots, N. \tag{18}$$

改写方程 (11) 可得如下迭代公式

$$\mu_{i+2}\pi_{1i+2} - \lambda_{i+1}\pi_{1i+1} = \mu_{i+1}\pi_{1i+1} - \lambda_i\pi_{1i}, \quad i = N, N+1, \cdots, L-2. \tag{19}$$

重复使用迭代公式 (19) 并利用方程 (12)，可得

$$\pi_{1j} = \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}\pi_{1j-1}, \quad N, N+1, \cdots, L. \tag{20}$$

令 $\pi_{ij} = q_{ij}\pi_{00}$，$i = 0, 1$，$j = 0, 1, 2, \cdots, L$，并分别将其代入方程 (13), (14), (15), (16), (18) 和 (20) 中，即得定理 1 的 (3) 式、(4) 式和 (5) 式。 **证毕**

推论 1 (a) 系统的稳态可用度为

$$A = \frac{\left(1 + \sum\limits_{j=1}^{N-1}\frac{\lambda_0}{\lambda_j}\right) + \sum\limits_{j=1}^{L-1}q_{1j}}{\left(1 + \sum\limits_{j=1}^{N-1}\frac{\lambda_0}{\lambda_j}\right) + \sum\limits_{j=1}^{L}q_{1j}}. \tag{21}$$

(b) 系统的稳态故障频度为

$$M=\frac{\lambda_{L-1}q_{1L-1}}{\left(1+\sum\limits_{j=1}^{N-1}\frac{\lambda_0}{\lambda_j}\right)+\sum\limits_{j=1}^{L}q_{1j}},\tag{22}$$

其中 q_{1j}，$j=1,2,\cdots,L$，由定理1给出。

证明 根据文献[1]，系统稳态可用度 A 和稳态故障频度 M 分别为

$$A=\sum_{i=0}^{N-1}\pi_{0i}+\sum_{i=1}^{L-1}\pi_{1i}$$

和

$$M=\lambda_{L-1}\pi_{1L-1},$$

再由定理1即可得到(21)式和(22)式。 **证毕**

推论2 修理工忙的概率为

$$P=\frac{\sum\limits_{i=1}^{L}q_{1i}}{\left(1+\sum\limits_{i=1}^{N-1}\frac{\lambda_0}{\lambda_i}\right)+\sum\limits_{i=1}^{L}q_{1i}},\tag{23}$$

其中 q_{1j}，$j=1,2,\cdots,L$，由定理1给出。

证明 由于修理工忙的概率

$$P=\sum_{i=1}^{L}\pi_{1i},$$

再由定理1即可得到(23)式。 **证毕**

根据文献[1]，由推论1可进一步求得：(a) 系统的平均开工时间 $MUT=A/M$，(b) 系统平均停工时间 $MDT=(1-A)/M$ 和 (c) 系统的平均周期 $MCT=1/M$。

下面我们通过数值例子给出系统稳态可靠性指标的数值结果。取$\lambda=0.2$，$\alpha=0.05$，$\mu=1.0$，$m=5$，$s=3$，$k=1$，N=3, $\nu=0.03$，$L=m+s-k+1=8$，则由定理1可得

$$q_{00}=1.0000,\ q_{01}=1.0455,\ q_{02}=1.0952,\ q_{11}=1.1500,\ q_{12}=2.3447,\ q_{13}=3.4075,$$
$$q_{14}=3.1261,\ q_{15}=2.2329,\ q_{16}=1.1650,\ q_{17}=0.3949,\ q_{18}=0.0653.$$

把以上结果代入方程(21)，(22)和(23)中，可得系统的稳态可靠性指标如下：

$$A=0.9962,\quad M=0.0046,\quad P=0.8155.$$

5 结论

本文研究了一个修理工且带有多部件温贮备的可修系统，文献[7]研究了该系统的瞬时可用度和可靠度的计算问题。考虑到问题的实际应用，本文考虑了系统的稳态情况。利用Markov过程理论和方程组的迭代求解方法，得到了系统的稳态可用度和稳态故障频度等可靠性指标。

参考文献:

[1] 曹晋华，程侃. 可靠性数学引论[M]. 北京：科学出版社，1986
[2] 孙海珍，苏保河. 具有休假的两部件并联可修系统的可靠性分析[J]. 石家庄铁道学院学报，1996, 9(4)：21-24
[3] 吴清太，叶尔骅. 开关寿命连续型二部件温贮备可修系统的可靠性分析[J]. 应用概率统计，2001, 17(2)：175-179
[4] Wang K H, Ke J C. Probabilistic analysis of a repairable system with warm standbys plus balking and reneging[J]. Applied Mathematical Modelling, 2003, 27(4): 327-336
[5] Wang K H, Kuo C C. Cost and probabilistic analysis of series eystems with mixed standby components[J]. Applied Mathematical Modelling, 2000, 24(12): 957-967
[6] Wang K H, Sivazlian B D. Reliability of a system with warm standbys and repairmen[J]. Microelectronic Reliability, 1989, 29(5): 849-860
[7] Jain M, Rakhee, Maheshwari S. N-policy for a machine repair system with spares and reneging[J]. Applied Mathematical Modelling, 2004, 28(6): 513-531
[8] Jain M, Rakhee, Singh M. Bilevel control of degraded machining system with warm standbys setup and vacation[J]. Applied Mathematical Modelling, 2004, 28(12): 1015-1026

Reliability Analysis of a Repairable System with Multiple Warm Standby Units and a Repairman's N-policy Vacation

YUE De-quan, QI Hong-juan, CAO Jing, LI Lan-qiao

(College of Science, Yanshan University, Qinhuangdao 066004)

Abstract: The multi-unit repairable system with warm standby units and repairman's vacation has much applications in many systems such as power systems, medical instrumentation systems and manufacturing systems, etc. We study a repairable system with multiple warm standby units and a repairman's N-policy vacation. The purpose of this paper is to study the steady state availability and the steady state failure frequency of the system. By using the Markov process and the recursive method, we derive the recursive formula for calculating steady state probability. Furthermore, we obtain the steady state availability and the steady state failure frequency of the system.

Keywords: repairable system; warm standby; N-policy; steady state availability; steady state failure frequency